MATICE LIN. ZOBRAZENÍ

U, V … vekt. pr. nad polem P

$e_1, \dots, e_n$ … báze U

$f_1, \dots, f_m$ … báze V $\quad f: U \to V$ lin.

$f(e_1), \dots, f(e_n) \in V$ mají souřadnice

$(y_1^1, \dots, y_1^m), \dots, (y_n^1, \dots, y_n^m)$ vzhledem k $f_1, \dots, f_m$

$$A = \begin{pmatrix} y_1^1 & \cdots & y_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^m & & y_n^m \end{pmatrix}$$

je matice lin. zobr. f vzhledem k bázím $e_1, \dots, e_n$ a $f_1, \dots, f_m$

$u \in U$ … $x = (x_1, \dots, x_n)$ souřadnice u

$\underline{A \cdot x^T = y^T}$ … souřadnice $f(u)$ v bázi $f_1, \dots, f_m$

Př.: $\mathbb{R}_3[x]$ polynomy prom. x nad polem $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 2

$\mathbb{R}_2[x]$ ...

$f: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $f: u \mapsto u'$

$(x^2, x, 1)$ ... báze $\mathbb{R}_3[x]$

$(x+1, x)$ ... báze $\mathbb{R}_2[x]$

$f(x^2) = 2x$ ... $(0, 2)$

$f(x) = 1$ ... $(1, -1)$

$f(1) = 0$ ... $(0, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$u = 2x^2 + 3x - 6$ ... $(2, 3, -6)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f(u) = 4x + 3$ ... $(3, 1)$

<u>Tvrzení</u> U .. vekt. pr. s bází $e_1, \dots, e_m$

V $f_1, \dots, f_n$

W $g_1, \dots, g_p$

$\alpha : U \to V$, $\beta : V \to W$ lin. zobr.

A B jejich matice

Pak $B \cdot A$ je matice lin. zobr. $\beta \circ \alpha : U \to W$ vzhledem k $e_1, \dots, e_m$ a $g_1, \dots, g_p$.

<u>Tvrzení</u> α ... izomorfismus $U \to V$ ($\dim U = \dim V$)

A jeho matice

<u>Pak A je</u> invertibilní a A^{-1} je matice α^{-1}.

Tvrzení: U ... vekt. pr. s bázemi $e_1, \dots, e_n$ (stará)

$e_1', \dots, e_n'$ (nová)

Q ... matice přechodu

V ... vekt. pr. s bázemi $f_1, \dots, f_m$ (stará)

$f_1', \dots, f_m'$ (nová)

R ... matice přechodu

$\varphi : U \to V$ lin. zobr., A jeho matice vzhledem ke starým bázím.

Pak jeho matice vzhledem k novým bázím

$A' = R^{-1} \cdot A \cdot Q$.

VLASTNÍ VEKTORY

lin. zobr. $\alpha: V \to V$ ... LIN. TRANSFORMACE

nenulový vektor $v \in V$ takový, že $\alpha(v) = \lambda \cdot v$ pro nějaké $\lambda \in P$, se nazývá VLASTNÍ VEKTOR a λ se nazývá VLASTNÍ ČÍSLO.

Př.: 1) $f \equiv 0$

2) $f = id$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \cdot x$

Tvrzení $f: V \to V$ lin. transformace, $\lambda \in P$.

Označme

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v \}.$$

Pak 1) V_λ je vektorový podprostor V.

2) V_λ je nenulový $\iff$ λ je vlastní číslo.

Tvrzení $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla $f: V \to V$.

$v_1, \dots, v_n$ vlastní vektory s vl. čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Pak $v_1, \dots, v_n$ jsou lin. nezávislé.

A .. matice lin. tr. , x souř.

$$A x = \lambda \cdot x$$

$$A x - \lambda x = O$$

$$A x - \lambda E x = O$$

$(A - \lambda E) x = O$ má nenulové řešení $\Longleftrightarrow$ $\det(A - \lambda E) = O$.

$\det(A - \lambda E) = \chi_A$ .. CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM matice A.

$$A' = Q^{-1} A \cdot Q$$

Matice A, B, pro které existuje regulární matice Q tak, že $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$, jsou si PODOBNÉ.

Tvrzení Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy.

Tvrzení V .. $\dim V = n$, χ_A má n kořenů $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $v_1, \ldots, v_n$ vl. vektory.

Pak vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoří bázi V a matice lin. tr. vzhledem k této bázi je

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \xi_n \end{pmatrix}.$$